Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a VI-a

Problema 1. Determinaţi cifrele nenule a, b, c pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\overline{a,b\,(c)}.$$

Problema 2. Se consideră numărul natural $n \geq 2012$. Pentru orice număr natural nenul $p \leq 2011$, notăm cu A_p mulţimea triunghiurilor care au o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la 2012, o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la p, iar lungimea celei de-a treia laturi este număr natural (se consideră că împărţirile se efectuează cu rest).

a) Arătaţi că, dacă $n < 4024$, atunci pentru orice alegere a lui p, toate elementele din mulţimea A_p sunt triunghiuri isoscele.

b) Determinaţi valorile numărului natural n pentru care mulţimea A_{1006} are 5 elemente.

Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi X un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $A \in (CX)$. Pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAX}$ se consideră punctul D, iar pe semidreapta $(AB$ se consideră punctul E astfel încât $AE + EC = DA + AC$. Demonstraţi că semidreapta $(CD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACE}$.

Problema 4. Se consideră un număr natural de şapte cifre, în scrierea zecimală a căruia se folosesc cel mult trei cifre distincte nenule. Arătaţi că se pot şterge trei cifre astfel încât numărul de patru cifre rămas şi răsturnatul său au un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.